

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тольяттинский государственный университет»

Б1.О.32  
(индекс дисциплины)

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Дополнительные главы анализа**

(наименование дисциплины)

по направлению подготовки  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

направленность (профиль)  
Компьютерные технологии и математическое моделирование

Форма обучения: очная

Год набора: 2026

Общая трудоемкость: 4 ЗЕ

**Распределение часов дисциплины по семестрам**

Семестр	3	Итого
Форма контроля	Зачет	
Вид занятий		
Лекции	16	16
Лабораторные		
Практические	32	32
Руководство: курсовые работы (проекты) / РГР		
Промежуточная аттестация	0,25	0,25
Контактная работа	48,25	48,25
Самостоятельная работа	95,75	95,75
Контроль		
<b>Итого</b>	<b>144</b>	<b>144</b>

Рабочую программу составил(и):

Доцент института цифровых технологий, канд. физ.-мат. наук Лелонд О.В.

*(должность, ученое звание, степень, Фамилия И.О.)*

*(должность, ученое звание, степень, Фамилия И.О.)*

Рецензирование рабочей программы дисциплины:



Отсутствует



Рецензент

*(должность, ученое звание, степень, Фамилия И.О.)*

Рабочая программа дисциплины составлена на основании ФГОС ВО и учебного плана  
направления подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

**Срок действия рабочей программы дисциплины до «31» августа 2030 г.**

УТВЕРЖДЕНО

На заседании института цифровых технологий

(протокол заседания № 1 от «5» сентября 2025 г.).

## 1. Цель освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины – формирование у обучающихся представлений об основных понятиях и методах анализа.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплины и практики, на освоении которых базируется данная дисциплина: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее: Теория вероятностей и математическая статистика.

## 3. Планируемые результаты обучения

Формируемые и контролируемые компетенции (код и наименование)	Индикаторы достижения компетенций (код и наименование)	Планируемые результаты обучения
ОПК-2 Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	ОПК-2.1 Знает математические основы программирования и языков программирования	Знать: математические основы программирования и языков программирования
		Уметь: разрабатывать программы на основе построенного алгоритма
		Владеть: технологией разработки программ на языке программирования
	ОПК-2.2 Умеет использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	Знать: математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач
		Уметь: использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач
		Владеть: навыками использования существующих математических методов и систем программирования для решения прикладных задач
	ОПК-2.3 Владеет навыками применения данного математического аппарата при решении конкретных задач	Знать: математический аппарат для решения конкретных задач
		Уметь: разрабатывать алгоритмы и реализовывать их на языке программирования
		Владеть: навыками использования математического аппарата для решения конкретных задач

#### 4. Структура и содержание дисциплины

Модуль (раздел)	Вид учебной работы	Наименование тем занятий (учебной работы)	Семестр	Объем, ч.	Баллы	Интерактив, ч.	Формы текущего контроля (наименование оценочного средства)
Модуль 1. Кратные интегралы.	Лек 1	Определение и свойства двойных интегралов. Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования.	3	2	-	-	Индивидуальное домашнее задание, тест итоговый
	Пр3 1	Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования.		2	5	-	
	Пр3 2	Замена переменных в двойном интеграле. Геометрические и физические приложения двойных интегралов.		2	5	-	
	Лек 2	Определение и свойства тройного интеграла. Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования.		2	-	-	
	Пр3 3	Определение и свойства тройного интеграла. Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования.		2	-	-	
	Пр3 4	Замена переменных в тройных интегралах. Вычисление объёмов с помощью тройных интегралов. Физические приложения тройных		4	5	-	
	СР	Работа с лекционным материалом и учебной литературой, выполнение домашних заданий.		10	-	-	

Модуль (раздел)	Вид учебной работы	Наименование тем занятий (учебной работы)	Семестр	Объем, ч.	Баллы	Интерактив, ч.	Формы текущего контроля (наименование оценочного средства)
	СР	Выполнение индивидуального домашнего задания по теме «Кратные интегралы».		31,75	10	-	Контрольная работа, тест итоговый
Модуль 2. Криволинейные интегралы.	Лек 3	Определение и свойства криволинейного интеграла первого рода. Вычисление криволинейного интеграла первого рода с помощью определённого интеграла. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.	3	2	-	-	
	Пр3 5	Вычисление криволинейного интеграла первого рода с помощью определённого интеграла. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.		2	5	-	
	Лек 4	Определение и свойства криволинейного интеграла второго рода. Вычисление криволинейного интеграла второго рода с помощью определённого интеграла. Физический смысл криволинейного интеграла второго рода.		2	-	-	
	Пр3 6	Вычисление криволинейного интеграла второго рода с помощью определённого интеграла. Физический смысл криволинейного интеграла второго рода.		2	-	-	

Модуль (раздел)	Вид учебной работы	Наименование тем занятий (учебной работы)	Семестр	Объем, ч.	Баллы	Интерактив, ч.	Формы текущего контроля (наименование оценочного средства)
Модуль 3. Скалярные и векторные поля.	Пр3 7	Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.	3	2	5	-	Контрольная работа, тест итоговый
	Пр3 8	Контрольная работа №1 по теме «Криволинейные интегралы».		2	18	-	
	СР	Работа с лекционным материалом и учебной литературой, выполнение домашних заданий.		18	-	-	
	Лек 5	Скалярные и векторные поля. Производная по направлению. Градиент. Потенциальное поле. Дивергенция и ротор. Соленоидальное поле.		2	-	-	
	Пр3 9	Скалярные и векторные поля. Производная по направлению. Градиент. Потенциальное поле. Дивергенция и ротор. Соленоидальное поле.		2	5	-	
	Пр3 10	Оператор Гамильтона. Правила вычислений с оператором Гамильтона. Нестационарные поля. Повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях. Разложение векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.		2	-	-	

Модуль (раздел)	Вид учебной работы	Наименование тем занятий (учебной работы)	Семестр	Объем, ч.	Баллы	Интерактив, ч.	Формы текущего контроля (наименование оценочного средства)
Модуль 4. Ряды и интегралы Фурье.	Пр3 11	Контрольная работа №2 по теме «Скалярные и векторные поля».	3	2	14	-	Контрольная работа, тест итоговый
	СР	Работа с лекционным материалом и учебной литературой, выполнение домашних заданий.		18	-	-	
	Лек 6	Ортонормированные системы в евклидовом пространстве. Ряд Фурье. Неравенство Бесселя. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Равенство Парсеваля.		2	-	-	
	Лек 7	Замкнутость тригонометрической системы и следствия из неё. Тригонометрические ряды Фурье. Условия равномерной сходимости и сходимости в точке тригонометрического ряда Фурье. Условия почленного дифференцирования. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье.		2	-	-	
	Пр3 12	Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье.		2	-	-	
	Пр3 13	Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье.		2	-	-	

Модуль (раздел)	Вид учебной работы	Наименование тем занятий (учебной работы)	Семестр	Объем, ч.	Баллы	Интерактив, ч.	Формы текущего контроля (наименование оценочного средства)
	Лек 8	Преобразование Фурье и его свойства. Условия разложимости функции в интеграл Фурье. Обратное преобразование Фурье.	3	2	-	-	
	ПрЗ 14	Прямое и обратное преобразования Фурье.		2	-	-	
	ПрЗ 15	Контрольная работа №3 по теме «Ряды и интегралы Фурье».		2	18	-	
	СР	Работа с лекционным материалом и учебной литературой, выполнение домашних заданий.		18	-	-	
	Псщ	Посещаемость		-	10	-	
	ПрЗ 16	Зачет	3	2	100	-	Итоговый тест
	ПА		3	0,25	-	-	
<b>Итого:</b>				<b>144</b>			

**Схема расчета итогового балла: Текущий рейтинг (все занятия и задания) + Результат итогового теста и все делится на 2**



## **5. Образовательные технологии**

Технология традиционного обучения: лекции 1-8, практические занятия 1-15.

## **6. Методические указания по освоению дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины необходимы посещение обучающимися лекционных и практических занятий, самостоятельная работа обучающихся с лекционным материалом и учебной литературой, выполнение индивидуального домашнего задания и всех предусмотренных в семестре контрольных работ.

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет.

В ходе лекционных занятий полезно задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Обучающийся может дополнить список предложенной литературы современными источниками, не представленными в списке, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании курсовых и выпускных квалификационных работ.

Обучающимся следует

- при подготовке к практическим занятиям обязательно использовать не только лекции, учебную литературу, но и другие источники;
- в начале занятий задавать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и использовании при решении задач, предложенных для самостоятельного решения;
- на занятиях доводить каждую задачу до окончательного ответа, демонстрировать понимание проведенных расчетов (рассуждений), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что решение задач проводится по рассмотренному на лекциях материалу и связано, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться обучающимся на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и в процессе решения задач. При этих условиях обучающийся не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (что очень важно) для активной проработки лекционного материала.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если обучающийся видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений (рассуждений, преобразований) составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение задач следует излагать подробно, вычисления (рассуждения, преобразования) располагать в строгом порядке. Решение при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Полезно (если это возможно) решать задачу несколькими способами и сравнивать полученные результаты. Решение задач определённого типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Подготовка к зачету способствует закреплению, углублению и систематизации знаний, получаемых в процессе обучения. Готовясь к зачету, обучающийся ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, упорядочивает свои знания. На зачете обучающийся демонстрирует как теоретические знания, приобретённые в процессе обучения по данной учебной дисциплине, так и навыки их практического использования при решении задач.

Необходимо ориентировать обучающихся на систематическую подготовку к занятиям в течение семестра, поскольку это позволит освоить основы изучаемой дисциплины, а время сессии можно будет использовать для систематизации уже имеющихся знаний.

## 7. Оценочные средства

### 7.1. Паспорт оценочных средств

Семестр	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
3	ОПК-2	Тестовые задания №1-300 Вопросы к зачету №1-70 Индивидуальное домашнее задание, контрольные работы №1,2,3

### 7.2. Типовые задания или иные материалы, необходимые для текущего контроля

#### Темы письменных работ

№ п/п	Темы
1	Кратные интегралы (индивидуальное домашнее задание)
2	Криволинейные интегралы (контрольная работа №1)
3	Скалярные и векторные поля (контрольная работа №2)
4	Ряды и интегралы Фурье (контрольная работа №3)

#### 7.2.1. Индивидуальное домашнее задание по теме «Кратные интегралы»

(наименование оценочного средства)

**Цель работы:** овладеть навыками вычисления двойных и тройных интегралов.

#### Типовые примеры заданий

##### Вариант 1

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx$$

Задание 2. Вычислить:

$$1) \iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy \quad 3) \iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x} \quad V: \begin{cases} x=0, y=1, y=x, \\ \end{cases}$$

$$2) \iint_D y e^{\frac{xy}{2}} dx dy; \quad 4) \iiint_V x dx dy dz;$$

$$D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4 \quad V: y=10x, y=0, x=1, z=xy, z=0.$$

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$y^2 - 2y + x^2 = 0$$

$$y^2 - 4y + x^2 = 0$$

$$1) y=\frac{3}{x}, y=4e^x, y=3, y=4; \quad 2) y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x$$

Задание 4. Пластика D задана ограничивающими ее кривыми, m-поверхностная плотность.

Найти ее массу.

$$D: x=1, y=0, y^2=4x (y \geq 0);$$

$$m=7x^2+y$$

Задание 5. Пластика D задана неравенствами, m-поверхностная плотность. Найти массу пластики.

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1;$$

$$D: m=y^2$$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$1) y=16\sqrt{2x}, y=\sqrt{2x},$$

$$2) x^2+y^2=2y,$$

$$z=0, x+z=2$$

$$z=\frac{5}{4}-x^2, z=0$$

$$3) y=5x^2+2, y=7,$$

$$4) z=\sqrt{9-x^2-y^2},$$

$$z=3y^2-7x^2-2,$$

$$\frac{9z}{2}=x^2+y^2$$

$$z=3y^2-7x^2-5$$

$$5) z=2-12(x^2+y^2), z=24x+2$$

Задание 7. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 49,$$

$$-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}} \leq z \leq -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},$$

$$-x \leq y \leq 0$$

Задание 8. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, m-плотность. Найти массу тела.

$$64(x^2+y^2)=z^2, x^2+y^2=4,$$

$$y=0, z=0 (y \geq 0, z \geq 0)$$

$$\frac{5(x^2+y^2)}{4}$$

$$m=$$

## Вариант 2

Задание 1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx$$

Задание 2. Вычислить:

$$1) \iint_D (9x^2+y^2+48x^3y^3) dx dy$$

$$3) \iiint_V x^2 z \sin(xyz) dx dy dz$$

$$D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}$$

$$V: \begin{cases} x=2, y=\pi, z=1, \end{cases}$$

$$2) \iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$4) \iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1$$

$$D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 2, x = 4 \quad V: x = 0, y = 0, z = 0$$

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 8x + y^2 = 0$$

$$1) x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2} \quad 2) y = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Задание 4. Пластика D задана ограничивающими ее кривыми, m-поверхностная плотность.

Найти ее массу.

$$x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, x = 0,$$

$$D: y = 0 (x \geq 0, y \geq 0);$$

$$m = \frac{(x+y)}{(x^2+y^2)}$$

Задание 5. Пластика D задана неравенствами, m-поверхностная плотность. Найти массу пластики.

$$1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 2$$

$$D: y \geq 0, y \leq \frac{2}{3}x$$

$$m = \frac{y}{x}$$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$1) y = 5\sqrt{x}, y = \frac{5x}{3}$$

$$2) x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 4y,$$

$$z = 0, z = 5 + 5\frac{\sqrt{x}}{3}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$$

$$3) y = 5x^2 + 2, y = -4x^2 + 7,$$

$$4) z = 15 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2},$$

$$z = 4 + 9x^2 + 5y^2,$$

$$z = -1 + 9x^2 + 5y^2;$$

$$5) z = 10[(x-1)^2 + y^2] + 1 \quad z = 21 - 20x$$

Задание 7. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64,$$

$$-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}} \leq z \leq -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},$$

$$-\sqrt{3}x \leq y \leq 0$$

Задание 8. Тело  $V$  задано ограничивающими его поверхностями,  $m$ -плотность. Найти массу тела.

$$x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=1,$$

$$(x^2+y^2 \leq 1), x=0 (x \geq 0);$$

$$m=4|z|$$

### Вариант 3

Задание 1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{-\sqrt{2}-y^2} f dx$$

Задание 2. Вычислить:

$$\iint_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3) dx dy \quad 3) \iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3$$

$$V: \begin{cases} x=0, y=-2, z=2, \\ \text{и другие грани} \end{cases}$$

$$\iint_D y \cos xy dx dy;$$

$$\iiint_V 15(y^2+z^2) dx dy dz$$

$$D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4 \quad V: z=x+y, x+y=1, x=0, y=0, z=0$$

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$y^2-6y+x^2=0$$

$$y^2-8y+x^2=0$$

$$1) x^2+y^2=72, y=-x^2 (y \leq 0) \quad 2) y=\sqrt{3}x, y=\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Задание 4. Пластика  $D$  задана ограничивающими ее кривыми,  $m$ -поверхностная плотность.

Найти ее массу.

$$D: x=1, y=0, y^2=4x (y \geq 0);$$

$$m = \frac{7x^2}{2} + 5y;$$

Задание 5. Пластика  $D$  задана неравенствами,  $m$ -поверхностная плотность. Найти массу пластины.

$$D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0;$$

$$m = x^2 y$$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$1) x^2+y^2=2, y=\sqrt{x}, y=0$$

$$2) x^2+y^2=8\sqrt{2}x, z=x^2+y^2-64$$

$$z=0, z=15x$$

$$z=0 (z \geq 0)$$

$$3) x=-5y^2+2, x=-3,$$

$$4) z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$z = 3x^2 + y^2 + 1$$

$$z = 3x^2 + y^2 - 5$$

$$5) z = 8(x^2 + y^2) + 3 \quad z = 16x + 3$$

$$z = \sqrt{\frac{(x^2 + y^2)}{255}}$$

Задание 7. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64,$$

$$z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}},$$

$$-\sqrt{3}x \leq y \leq 0$$

Задание 8. Тело  $V$  задано ограничивающими его поверхностями,  $m$ -плотность. Найти массу тела.

$$x^2 + y^2 + z = 1, x^2 + y^2 = 2z,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$m = 10x$$

#### Вариант 4.

Задание 1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$$

Задание 2. Вычислить:

$$1) \iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy$$

$$3) \iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz$$

$$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}, y = x^3$$

$$V: \begin{cases} x = -1, y = 2, z = 1, \\ \end{cases}$$

$$2) \iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}} dx dy;$$

$$4) \iiint_V (3x + 4y) dx dy dz$$

$$D: x = 0, y = 2, y = x$$

$$V: y = x, y = 0, x = 1, z = 5(x^2 + y^2), z = 0$$

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$1) x = 8 - y^2; x = -2y;$$

$$2) y = 0, y = x$$

Задание 4. Пластика  $D$  задана ограничивающими ее кривыми,  $m$ -поверхностная плотность.

Найти ее массу.

$$D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16;$$

$$x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0);$$

$$m = \frac{(2x + 5y)}{(x^2 + y^2)}$$

Задание 5. Пластика  $D$  задана неравенствами,  $m$ -поверхностная плотность. Найти массу пластины.

$$D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0;$$

$$x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0);$$

$$m = \frac{7x^2y}{18}$$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$1) x+y=2, y=\sqrt{x}, z=12y, z=0$$

$$2) x^2+y^2+4x=0, z=8-y^2, z=0$$

$$3) x=2y^2-3, x=-7y^2+6$$

$$4) z=\sqrt{64-x^2-y^2}, z=1$$

$$z=1+\sqrt{x^2+16y^2}$$

$$x^2+y^2=60$$

$$z=-3+\sqrt{x^2+16y^2}$$

(внутри цилиндра)

$$z=2-20[(x+1)^2+y^2]$$

$$5) z=-40x-38$$

Задание 7. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$$

$$z \leq -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}},$$

$$0 \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Задание 8. Тело V задано ограничивающими его поверхностями,  $m$ -плотность. Найти массу тела.

$$x^2+y^2=\frac{16}{49}, x^2+y^2=\frac{4}{7}z,$$

$$x=0, y=0, (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$m=80yz$$

### Вариант 5

Задание 1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f dx$$

Задание 2. Вычислить:

$$1) \iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$$

$$3) \iiint_V x^2 \operatorname{sh}(3xy) dx dy dz$$

$$D: x=1, y=-\sqrt[3]{x}, y=x^2$$

$$V: \begin{cases} x=1, y=2x, y=0, \end{cases}$$

$$\iint_D y \sin xy dx dy;$$

$$\iiint_V (1+2x^3) dx dy dz$$

$$D: x=0, y=2, y=x$$

$$V: y=x, y=0, x=1, z=5(x^2+y^2), z=0$$

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y^2 - 10x + x^2 = 0$$

$$1) y = \frac{3}{x}; y = 8e^x, y = 3, y = 8;$$

$$2) y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

Задание 4. Пластика D задана ограничивающими ее кривыми, m-поверхностная плотность.

Найти ее массу.

$$D: x = 2y = 0, y^2 = 2x (y \geq 0);$$

$$m = \frac{7x^2}{(8+2y)}$$

Задание 5. Пластика D задана неравенствами, m-поверхностная плотность. Найти массу пластики.

$$D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 4, y \geq 0, y \leq \frac{x}{2}$$

$$m = \frac{8y}{x^3}$$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$1) x = 20\sqrt{2y}, x = 5\sqrt{2y}, z + y = \frac{1}{2}y, z = 0$$

$$x^2 + y^2 = 6x, x^2 + y^2 = 9x, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, y = 0 (y \leq 0)$$

2)

$$3) y = -6x^2 + 8, y = 2, z = x - x^2 - y^2 - 1$$

$$4) z = \sqrt{\frac{16}{9} - x^2 - y^2}, 2z = x^2 + y^2$$

$$z = x - x^2 - y^2 - 5$$

$$z = 4 - 14[x^2 + y^2]$$

$$5) z = -4 - 28x$$

Задание 7. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$$

$$z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}},$$

$$-\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x$$

Задание 8. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, m-плотность. Найти массу тела.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 4z^2, x = 0, y = 0, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

$$m = 20z$$



**Вариант 6**

Задание 1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^{\arcsin x} f dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_0^{\arccos x} f dy$$

Задание 2. Вычислить:

$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy \quad \iiint_V y^2 z^2 \cos xyz dx dy dz$$

1) D

3) V

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2$$

$$V: \begin{cases} x=1, y=\pi, y=0, \\ \end{cases}$$

$$\iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$\iiint_V (1+2x^3) dx dy dz$$

2) D

4) V

$$D: x=0, y=2, y=x$$

$$V: y=x, y=0, x=1, z=5(x^2+y^2), z=0$$

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 8x + y^2 = 0$$

$$1) y = \frac{3}{x}; y = 8e^x, y = 3, y = 8;$$

$$2) y = 0, y = x$$

Задание 4. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, m-поверхностная плотность.

Найти ее массу.

$$D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16$$

$$x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$m = \frac{(x+y)}{(x^2+y^2)}$$

Задание 5. Пластинка D задана неравенствами, m-поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

$$D: \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, x \geq 0$$

$$m = \frac{8y}{x^3}$$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$1) x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x = 0$$

$$3) x = 5y^2 - 9, x = -4,$$

$$z = 0, z = \frac{12x}{5}$$

$$z = x^2 + 4x - y^2 - 4, z = x^2 + 4x - y^2 + 2$$

$$2) x^2 + y^2 = 2y, x^2 + y^2 = 5y,$$

$$4) z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}, z = 6$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$$

$$x^2 + y^2 = 51 \quad (\text{внутри цилиндра})$$

$$5) z = 4 - 6[(x-1)^2 + y^2], z = 12x - 8$$

Задание 7. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64$$

$$z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}},$$

$$-\sqrt{3x} \leq y \leq \sqrt{3x}$$

Задание 8. Тело  $V$  задано ограничивающими его поверхностями,  $m$ -плотность. Найти массу тела.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4, x^2 + y^2 = 8z, \\x &= 0, y = 0, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0) \\m &= 5z\end{aligned}$$

### Краткое описание и регламент выполнения

Индивидуальное домашнее задание сдается преподавателю в течение двух недель после изучения модуля «Кратные интегралы».

### Критерии оценки:

- верное выполнение 90-100% заданий - 10 баллов;
- верное выполнение 80-89% заданий - от 8 до 9 баллов;
- верное выполнение 66-79% заданий - от 7 до 8 баллов;
- верное выполнение 50-65% заданий - от 5 до 7 баллов;
- верное выполнение менее 50% заданий - от 0 до 5 баллов.

### 7.2.2. Контрольная работа №1 по теме «Криволинейные интегралы»

(наименование оценочного средства)

**Цель работы:** овладеть навыками вычисления криволинейных интегралов первого и второго рода.

### Типовые примеры заданий

#### Вариант 1

Задание 1. Вычислить  $\int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) dl$ , где  $L$  — астроида  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

Задание 2. Вычислить  $\int_L y dl$  по отрезку прямой от точки (0; 0) до точки (2; 4).

Задание 3. Вычислить  $\int_L (x^2 + y^2) dx + xy dy$  по кривой  $y = e^x$  от точки (0; 1) до точки (1; e).

Задание 4. Вычислить  $\int_L xy dx + y^2 dy$  по кривой  $x = t^2, y = t, 1 \leq t \leq 2$ , в направлении возрастания параметра.

Задание 5. Вычислить работу силы  $\vec{F} = \{y, -x\}$  при перемещении материальной точки массы 1 вдоль дуги окружности  $x = \cos t, y = \sin t, -\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ , пробегаемой по ходу часовой стрелки.

#### Вариант 2

Задание 1. Вычислить массу материальной кривой, заданной уравнением  $y = \ln x, 1 \leq x \leq e$ , с плотностью  $\rho(x, y) = x^2$ .

Задание 2. Вычислить  $\int_L 2x dl$  по параболе  $y = x^2$  от точки (0; 0) до точки (1; 1).

Задание 3. Вычислить  $\int_{AB} (x + y) dx$  по параболе  $y = x^2/2$  от точки (0; 0) до точки (2; 2).

Задание 4. Вычислить  $\int_L x^2 y dx + y^2 x dy$  по кривой  $x=t, y=t^3, 0 \leq t \leq 1$ , в направлении возрастания параметра.

Задание 5. Вычислить  $\int_{AB} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$  по кривой  $y=1-x$  от точки (0; 0) до точки (2; 0).

### Вариант 3

Задание 1. Вычислить  $\int_L (x+y) dl$ , где  $L$  — кривая, заданная уравнениями  $x=t, y=t, z=\sqrt{R^2-2t^2}, 0 \leq t \leq R/2$ .

Задание 2. Вычислить  $\int_L 3y dl$  по отрезку прямой от точки (0; 0) до точки (1; 3).

Задание 3. Вычислить  $\int_{AB} (x+y) dx$  по ломаной ACB, проходящей через точки A(0; 0), C(2; 0), B(2; 2).

Задание 4. Вычислить  $\int_L (x+y) dx + (x-y) dy$  по кривой  $x=R \cos t, y=R \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} (R>0)$ , в направлении возрастания параметра.

Задание 5. Вычислить работу силы  $\vec{F}=\{z, -x, y\}$  при перемещении материальной точки массы 1 вдоль кривой  $x=a \cos t, y=b \sin t, z=ct, 0 \leq t \leq 2\pi (a, b, c>0)$ , от точки A(a, 0, 0) до точки B(a, 0, 2π).

### Вариант 4

Задание 1. Вычислить  $\int_L y^2 dl$ , где  $L$  — арка циклоиды  $x=t-\sin t, y=1-\cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

Задание 2. Вычислить  $\int_L 5y dl$  по параболе  $3x=y^2$  от точки (0; 0) до точки (3; 3).

Задание 3. Вычислить  $\int_{AB} (x+y) dx - x dy$  по ломаной ACB, проходящей через точки A(0; 0), C(2; 0), B(4; 2).

Задание 4. Вычислить  $\int_L y^2 dx + xy dy$  по кривой  $x=a \cos t, y=b \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} (a, b>0)$ , в направлении возрастания параметра.

Задание 5. Вычислить работу силы  $\vec{F}=\{x+y, 2x\}$  при перемещении материальной точки массы 1 вдоль окружности  $x=a \cos t, y=a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi (a>0)$ , пробегаемой против хода часовой стрелки.

### Вариант 5

Задание 1. Вычислить  $\int_L z dl$ , где  $L$  — коническая винтовая линия  $x=t \cos t, y=t \sin t, z=t, 0 \leq t \leq 1$ .

Задание 2. Вычислить  $\int_L 6x dl$  по параболе  $y=3x^2$  от точки (1; 3) до точки (2; 12).

Задание 3. Вычислить  $\int_{AB} ydx + xdy$  по ломаной ACB, проходящей через точки A(0; 0), C(2; 0), B(4; 2).

Задание 4. Вычислить  $\int_L ydx - xdy$  по кривой  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} (a > 0)$ , в направлении возрастания параметра.

Задание 5. Вычислить работу силы  $\vec{F} = \{x + y, x\}$  при перемещении материальной точки массы 1 вдоль окружности  $x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi (a > 0)$ , пробегаемой против хода часовой стрелки.

### Вариант 6

Задание 1. Вычислить массу материальной кривой  $L$ , заданной уравнениями  $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}, 0 \leq t \leq \ln 3$ , и имеющей постоянную плотность  $\rho_0$ .

Задание 2. Вычислить  $\int_L 7xdl$  по отрезку прямой от точки (1; 4) до точки (2; 8).

Задание 3. Вычислить  $\int_L xdy$  по контуру треугольника, образованного прямыми  $y = x, x = 2, y = 0$ , проходимоу в положительном направлении.

Задание 4. Вычислить  $\int_L y^2 dx + x^2 dy$  по кривой  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi (a > 0)$ , в направлении возрастания параметра.

Задание 5. Вычислить  $\int_{AB} xdx - ydy$  по ломаной ACB, проходящей через точки A(0; 0), C(1; 0), B(1; 2).

### Краткое описание и регламент выполнения

Контрольная работа выполняется на практическом занятии после изучения модуля «Криволинейные интегралы» и сдается преподавателю.

### Критерии оценки:

- правильное выполнение не менее 90% работы - 18 баллов;
- правильное выполнение 70-89% работы - 14-17 баллов;
- правильное выполнение 50-69% работы - 9-13 баллов;
- правильное выполнение менее 50% работы - 0-8 баллов.

### 7.2.3. Контрольная работа №2 по теме «Скалярные и векторные поля»

(наименование оценочного средства)

**Цель работы:** овладеть навыками вычисления характеристик скалярных и векторных полей.

### Типовые примеры заданий

#### Вариант 1

Задание 1. Вычислить производную скалярного поля  $u = x^2 + y^2$  в точке  $M(1; 1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \{-1; 1\}$ .

Задание 2. Вычислить градиент скалярного поля  $u = (x-1)(y-2)(z-3)$  в точке  $M(2; 3; 4)$ .

Задание 3. Вычислить дивергенцию векторного поля  $\vec{a} = (x-y)(y-z)\vec{i} + (y-z)(z-x)\vec{j} + (z-x)(x-y)\vec{k}$ .

Задание 4. Вычислить ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ .

Задание 5. Доказать равенство  $\text{grad} f(u) = f'(u) \text{grad} u$ .

### Вариант 2

Задание 1. Вычислить производную скалярного поля  $u = 3xyz^2z^3$  в точке  $M(0;1;2)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \{2;4;0\}$ .

Задание 2. Вычислить градиент скалярного поля  $u = x^2 - 3yz$  в точке  $M(-1;0;2)$ .

Задание 3. Вычислить дивергенцию векторного поля  $\vec{a} = (y^2+z^2)(x+y)\vec{i} + (z^2+x^2)(y+z)\vec{j} + (x^2+y^2)(z+x)\vec{k}$ .

Задание 4. Вычислить ротор векторного поля  $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ .

Задание 5. Доказать равенство  $\text{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad} v$ .

### Вариант 3

Задание 1. Вычислить производную скалярного поля  $u = e^{x-y}$  в точке  $M(2;3)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \{1;0\}$ .

Задание 2. Вычислить градиент скалярного поля  $u = \sin(xy)$  в точке  $M(-2;1)$ .

Задание 3. Вычислить дивергенцию векторного поля  $\vec{a} = (x^2+y^2)(y-z)\vec{i} + (y^2+z^2)(z-x)\vec{j} + (z^2+x^2)(x-y)\vec{k}$ .

Задание 4. Вычислить ротор векторного поля  $\vec{a} = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^2\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}$ .

Задание 5. Доказать равенство  $\text{grad}(u+v) = \text{grad} u + \text{grad} v$ .

### Вариант 4

Задание 1. Вычислить производную скалярного поля  $u = \frac{x}{y}$  в точке  $M(2;2)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \{-3;1\}$ .

Задание 2. Вычислить градиент скалярного поля  $u = \frac{xy}{z}$  в точке  $M(1;-1;2)$ .

Задание 3. Вычислить дивергенцию векторного поля  $\vec{a} = f_1(y, z)\vec{i} + f_2(x, z)\vec{j} + f_3(x, y)\vec{k}$ .

Задание 4. Вычислить ротор векторного поля  $\vec{a} = yz\vec{i} + z(x+2y)\vec{j} + y(x+y)\vec{k}$ .

Задание 5. Доказать равенство  $\text{grad}(u/v) = \frac{v \text{grad} u - u \text{grad} v}{v^2}$ .

### Вариант 5

Задание 1. Вычислить производную скалярного поля  $u = \cos(2yz)$  в точке  $M(0;1;4)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \{-1;4;8\}$ .

Задание 2. Вычислить модуль градиента скалярного поля  $u = \frac{x-y^2}{2}$  в точке  $M(2;4)$ .

Задание 3. Вычислить дивергенцию векторного поля  $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z+x)\vec{k}$ .

Задание 4. Вычислить ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{y}{x^2}\vec{j} - \frac{1}{x}\vec{k}$ .

Задание 5. Доказать равенство  $\vec{l}(u\vec{c}) = (\vec{c}, \text{grad} u)$ , где  $\vec{c} - \vec{l}$  постоянный вектор.

### Вариант 6

Задание 1. Выяснить, в каких точках градиент скалярного поля  $u = x^2 + y^2 - 2xy$  равен нулю.

Задание 2. Вычислить производную скалярного поля  $u = \frac{x}{y^2}$  в точке  $M(3;1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \{-2; 4\}$ .

Задание 3. Вычислить дивергенцию векторного поля  $\vec{a} = (xy)\vec{i} + (yz)\vec{j} + (zx)\vec{k}$ .

Задание 4. Вычислить ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{y}{x^2}\vec{i} - \frac{1}{x}\vec{j}$ .

Задание 5. Доказать равенство  $\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div} \vec{a} + \text{div} \vec{b}$ .

### Краткое описание и регламент выполнения

Контрольная работа выполняется на практическом занятии после изучения модуля «Скалярные и векторные поля» и сдается преподавателю.

### Критерии оценки:

- правильное выполнение не менее 90% работы - 14 баллов;
- правильное выполнение 70-89% работы - 11-13 баллов;
- правильное выполнение 50-69% работы - 7-10 баллов;
- правильное выполнение менее 50% работы - 0-6 баллов.

## 7.2.4. Контрольная работа №3 по теме «Ряды и интегралы Фурье»

(наименование оценочного средства)

**Цель работы:** овладеть навыками разложения функций в ряд Фурье, построения прямого и обратного преобразований Фурье для заданной функции.

### Типовые примеры заданий

#### Вариант 1

Задание 1. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = x^2$  на отрезке  $[-1, 1]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 2. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \text{ на отрезке } [-1, 1]. \text{ В каких точках отрезка он сходится к}$$

данной функции?

Задание 3. Вычислить сумму тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x) = x + 2, -1 \leq x \leq 1$ , в точке  $x = 0$ .

Задание 4. Найти прямое и обратное преобразования Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} x \vee, \forall x \vee \leq 1 \\ 0, \forall x \vee \leq 1 \end{cases}.$$

#### Вариант 2

Задание 1. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = x - 1$  на отрезке  $[-2, 2]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 2. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 3. Вычислить сумму тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x) = 5x^2, -2 \leq x \leq 2$ , в точке  $x = 1$ .

Задание 4. Найти прямое и обратное преобразования Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & \forall x \in [0, 1] \\ 0, & \forall x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1] \end{cases}.$$

### Вариант 3

Задание 1. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = x \cos(2x)$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 2. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  на отрезке  $[-2, 2]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 3. Вычислить сумму тригонометрического ряда Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad \text{в точке } x = -1.$$

Задание 4. Найти прямое и обратное преобразования Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

### Вариант 4

Задание 1. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = (3x + 1) \sin x$  на отрезке  $[-3, 3]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 2. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции

$f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  на отрезке  $[-2, 2]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 3. Вычислить сумму тригонометрического ряда Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in (0, 3] \\ 0, & x \in [-3, 0] \end{cases} \quad \text{в точке } x = 0.$$

Задание 4. Найти прямое и обратное преобразования Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, 1] \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1 \end{cases}.$$

### Вариант 5

Задание 1. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = x^3$  на отрезке  $[-1, 1]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 2. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$  на отрезке  $[-1, 1]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 3. Вычислить сумму тригонометрического ряда Фурье функции

$$f(x) = [x], -2 \leq x \leq 2, \text{ в точке } x = 2.$$

Задание 4. Найти прямое и обратное преобразования Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \in [-1, 0] \\ 0, & x < -1 \text{ или } x > 0 \end{cases}.$$

### Вариант 6

Задание 1. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = 3x^2$  на отрезке  $[-2, 2]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 2. Записать тригонометрический ряд Фурье для функции  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  на отрезке  $[-2, 2]$ . В каких точках отрезка он сходится к данной функции?

Задание 3. Вычислить сумму тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x) = i$  в точке  $x = 0$ .

Задание 4. Найти прямое и обратное преобразования Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 1] \\ i, & x < 0 \text{ или } x > 2i \end{cases}.$$

### Краткое описание и регламент выполнения

Контрольная работа выполняется на практическом занятии после изучения модуля «Ряды и интегралы Фурье» и сдается преподавателю.

### Критерии оценки:

- правильное выполнение не менее 90% работы - 18 баллов;
- правильное выполнение 70-89% работы - 14-17 баллов;
- правильное выполнение 50-69% работы - 9-13 баллов;
- правильное выполнение менее 50% работы - 0-8 баллов.

### Процедура оценивания за посещаемость

Посещаемость занятий в течение всего семестра оценивается баллами от 0 до 10.

### Критерии оценки:

0 баллов выставляется обучающемуся, не посетившему ни одного занятия. 10 баллов выставляется обучающемуся, присутствовавшему на всех занятиях. От 1 до 9 баллов выставляется обучающемуся пропорционально количеству посещенных им занятий.

### 7.2.5. Тест итоговый по курсу «Дополнительные главы анализа»

(наименование оценочного средства)

### Типовые примеры заданий

#### Модуль I. Кратные интегралы

##### Тема 1.1. Двойные интегралы

1. Вычисление интеграла  $\iint_G f(x, y) dx dy$ , где  $G = i$  область, ограниченная линиями

$y = e^x, y = 0, x = -1, x = 1$ , сводится к вычислению

- двух повторных интегралов независимо от того, по какой переменной производится внешнее интегрирование
- двух повторных интегралов, если внешнее интегрирование производится по  $x$ , и одного повторного интеграла, если внешнее интегрирование производится по  $y$
- одного повторного интеграла независимо от того, по какой переменной производится внешнее интегрирование



- двух повторных интегралов, если внешнее интегрирование производится по  $y$ , и одного повторного интеграла, если внешнее интегрирование производится по  $x$
2. Интеграл  $\iint_G (x+y^2) dx dy$ , где  $G$  — область, ограниченная кривыми  $y=x$  и  $y=x^2$ , равен
- 1/7
  - 1/6
  - 2/21
  - 5/42
3. Справедливо равенство
- $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \left[ \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x,y) dx \right] + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x,y) dx$
  - $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) dy = \int_0^2 dy \left[ \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x,y) dx \right] + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x,y) dx$
  - $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \left[ \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x,y) dx \right] + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^1 f(x,y) dx$
  - $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \left[ \int_{y^2/2}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x,y) dx \right] + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x,y) dx$
4. Если в интеграле  $\iint_G f(x,y) dx dy$ , где  $G$  — круг, ограниченный окружностью  $x^2+y^2=2x$ , перейти к полярным координатам  $(\rho, \varphi)$ , то области  $G$  будет соответствовать область  $g$ , задаваемая неравенствами
- $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \cos \varphi$
  - $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$
  - $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \cos \varphi$
  - $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$
5. Интеграл  $\iint_G x^2 y^2 dx dy$ , где  $G = \{(x,y): 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ , равен
- $21\pi/4$
  - $21\pi/5$
  - $21\pi/8$
  - $21\pi/2$

6. Якобиан перехода от прямоугольных координат  $(x, y, z)$  к цилиндрическим координатам  $(\rho, \varphi, z)$  равен
- $\rho$
  - $\rho/2$
  - $\rho^2$
  - $\rho^2/2$
7. Переход от прямоугольных координат  $(x, y, z)$  к сферическим координатам  $(r, \theta, \varphi)$  осуществляется с помощью формул
- $x = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, y = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, z = r^2 \cos^2 \theta, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$
  - $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$
  - $x = r^2 \sin \theta \cos \varphi, y = r^2 \sin \theta \sin \varphi, z = r^2 \cos \theta, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$
  - $x = r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, y = r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, z = r \cos^2 \theta, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$
8. При вычислении момента инерции тела относительно начала координат используются
- статические моменты тела относительно координатных плоскостей
  - координаты центра тяжести тела
  - моменты инерции тела относительно координатных плоскостей
  - моменты инерции тела относительно осей координат
9. Если  $I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ , где  $T$  — область, ограниченная эллипсоидом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , то справедливо равенство
- $I = \int_{-a}^a dx \int_{\frac{-1}{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{\frac{1}{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{\frac{-1}{c}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{\frac{1}{c}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z) dz$
  - $I = \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z) dz$
  - $I = \int_{-a}^a dx \int_{\frac{-1}{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{\frac{1}{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z) dz$
  - $I = \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{\frac{-1}{c}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{\frac{1}{c}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z) dz$
10. Интеграл  $\iiint_T (x+y+z) dx dy dz$ , где  $T$  — область, ограниченная поверхностями  $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ , равен
- $1/4$
  - $1/8$

- 1/6
- 1/10

## Модуль II. Криволинейные интегралы

### Тема 2.1. Криволинейные интегралы первого рода

11. Если кривая  $L$  задана в полярных координатах уравнением  $r=r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r(\varphi)$  непрерывна на  $[\varphi_1, \varphi_2], f(x, y)$  непрерывна вдоль кривой  $L$ , то существует криволинейный интеграл первого рода от функции  $f(x, y)$  по кривой  $L$ , обозначаемый

$$\int_L f(x, y) dl, \text{ и справедливо равенство}$$

- $\int_L f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r'(\varphi)^2 + (r''(\varphi))^2} d\varphi$
- $\int_L f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r^2(\varphi) \cos \varphi, r^2(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r'(\varphi)^2 + (r''(\varphi))^2} d\varphi$
- $\int_L f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r'(\varphi)^2 + (r''(\varphi))^2} d\varphi$
- $\int_L f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r^2(\varphi) \cos \varphi, r^2(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r'(\varphi)^2 + (r''(\varphi))^2} d\varphi$

12. Криволинейный интеграл первого рода обладает следующими свойствами:

- ☐ при изменении направления обхода кривой интеграл изменяет знак
- ☐ линейность
- ☐ аддитивность
- ☐ модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля

13. При вычислении статических моментов плоской кривой относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  используются

- ☐ масса кривой
- ☐ плотность кривой
- ☐ моменты инерции кривой относительно координатных осей
- ☐ расстояния от точек кривой до координатных осей

14. Интеграл  $\int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) dl$ , где  $L$  — астроида  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$ , равен

- $3a^{7/3}$
- $4a^{7/3}$
- $2a^{7/3}$
- $6a^{7/3}$

15. Масса материальной кривой, заданной уравнением  $y = \ln x$ ,  $1 \leq x \leq e$ , с плотностью  $\rho(x, y) = x^2$  равна
- ☐  $\frac{1}{2} \left( (1+e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2} \right)$
  - ☐  $\frac{1}{3} \left( (1+e^2)^{3/2} + 2\sqrt{2} \right)$
  - ☐  $\frac{1}{2} \left( (1+e^2)^{3/2} + 2\sqrt{2} \right)$
  - ☐  $\frac{1}{3} \left( (1+e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2} \right)$

## Тема 2.2. Криволинейные интегралы второго рода

16. Если кривая АВ задана уравнением  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , и имеет кусочно-непрерывную производную, а функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  кусочно-непрерывны вдоль кривой АВ, то существует общий криволинейный интеграл второго рода  $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  и

справедливо равенство

- ☐  $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) (y'(x))^2) dx$
- ☐  $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)) dx$
- ☐  $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \vee y'(x) \vee \dot{\imath}) dx$
- ☐  $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \sqrt{\dot{\imath} y'(x) \vee \dot{\imath}}) dx$

17. Криволинейные интегралы второго рода обладают следующими свойствами:

- ☐ линейность
- ☐ аддитивность
- ☐ модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля
- ☐ при изменении направления обхода кривой знак интеграла изменяется на противоположный

18. Работа силы  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  при перемещении материальной точки массы 1 из точки А в точку В вдоль кривой АВ равна

- ☐  $\int_{AB} P^2(x, y) dx + Q^2(x, y) dy$
- ☐  $\int_{AB} |P(x, y)| dx + \dot{\imath} Q(x, y) \vee dy$
- ☐  $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$
- ☐  $\int_{AB} \sqrt{|P(x, y)|} dx + \sqrt{\dot{\imath} Q(x, y) \vee \dot{\imath}} dy \dot{\imath}$

19. Интеграл  $\int_{AB} x^2 dx + x y dy$  по кривой  $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$ , в направлении возрастания параметра равен
- 1
  - 0
  - 2
  - -1
20. Интеграл  $\int_{AB} (x + y) dx$  по отрезку прямой от точки (0; 0) до точки (2; 2) равен
- 8
  - 6
  - 4
  - 2

### Модуль III. Ряды и интегралы Фурье

#### Тема 3.1. Ряды Фурье

21. Примером ортонормированной системы в пространстве всех кусочно-непрерывных на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функций является тригонометрическая система
- $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \dots$
  - $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \dots$
  - $\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi} \cos x, \sqrt{\pi} \sin x, \dots, \sqrt{\pi} \cos(nx), \sqrt{\pi} \sin(nx), \dots$
  - $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{2\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nx)}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{2\sqrt{\pi}}, \dots$
22. Рядом Фурье элемента  $f$  по ортонормированной системе  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  называется ряд вида
- $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$ , где  $f_k = (f, \psi_k)$
  - $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$ , где  $f_k = (f, \psi_k)^2$
  - $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$ , где  $f_k = \langle f, \psi_k \rangle \vee \langle f, \psi_k \rangle$
  - $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$ , где  $f_k = \sqrt{\langle f, \psi_k \rangle \vee \langle f, \psi_k \rangle}$
23. Для произвольного элемента  $f$ , любой ортонормированной системы  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  данного евклидова пространства и любого номера  $n$  справедливо тождество Бесселя:
- $\langle \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f, \langle f, \psi_k \rangle \rangle = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2$
  - $\langle \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f, \langle f, \psi_k \rangle \rangle^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n f_k^2$

- $\sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \vee \hat{\imath}^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2$
- $\sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \vee \hat{\imath} = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n f_k^2$

24. Тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x) = (3x+1)\sin x$  на отрезке  $[-3, 3]$
- содержит синусы и не содержит косинусов
  - содержит косинусы и не содержит синусов
  - содержит как синусы, так и косинусы
25. Тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x) = x^3$  на отрезке  $[-1, 1]$  сходится к  $f(x)$
- во всех точках отрезка  $[-1, 1]$
  - всюду на отрезке  $[-1, 1]$  за исключением двух точек
  - всюду на отрезке  $[-1, 1]$  за исключением одной точки
  - всюду на отрезке  $[-1, 1]$  за исключением трёх точек

### Тема 3.2. Интегралы Фурье

26. Если  $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ , то для любой точки  $y \in (-\infty, \infty)$  существует несобственный интеграл, называемый образом (или преобразованием) Фурье функции  $f(x)$  и определяемый равенством
- $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ixy} f(x) dx$
  - $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \vee f(x) \vee dx$
  - $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx$
  - $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ixy} \vee f(x) \vee dx$
27. Пусть  $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ . Тогда функция  $\hat{f}(y)$ , являющаяся образом Фурье функции  $f(x)$ , непрерывна по  $y$  в каждой точке бесконечной прямой и удовлетворяет условию
- $\lim_{\hat{\imath}, y \vee \rightarrow \infty} |\hat{f}(y)| = 1/2$
  - $\lim_{\hat{\imath}, y \vee \rightarrow \infty} |\hat{f}(y)| = 1$
  - $\lim_{\hat{\imath}, y \vee \rightarrow \infty} |\hat{f}(y)| = +\infty$
  - $\lim_{\hat{\imath}, y \vee \rightarrow \infty} |\hat{f}(y)| = 0$
28. Обратным преобразованием Фурье функции  $f(x)$  называется интеграл
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixy} \hat{f}(y)) dy$ , понимаемый в смысле главного значения
  - $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixy} \vee \hat{f}(y) \vee) dy$ , понимаемый в смысле главного значения

- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-ixy} \vee \hat{f}(y) \vee) dy$ , понимаемый в смысле главного значения
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-ixy} \hat{f}(y)) dy$ , понимаемый в смысле главного значения

29. Справедливы утверждения:

- ☐ образ Фурье чётной функции является чётной функцией
- ☐ образ Фурье чётной функции является нечётной функцией
- ☐ образ Фурье нечётной функции является нечётной функцией
- ☐ образ Фурье нечётной функции является чётной функцией

30. Преобразование Фурье функции  $f(x) = \begin{cases} 1, \forall x \in [-1, 1] \\ 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$  имеет вид

- $\hat{f}(y) = \begin{cases} \frac{\sin^2 y}{y}, y \neq 0 \\ 1, y = 0 \end{cases}$
- $\hat{f}(y) = \begin{cases} \frac{\cos y}{y}, y \neq 0 \\ 1, y = 0 \end{cases}$
- $\hat{f}(y) = \begin{cases} \frac{2 \sin y}{y}, y \neq 0 \\ 2, y = 0 \end{cases}$
- $\hat{f}(y) = \begin{cases} \frac{2 \cos y}{y}, y \neq 0 \\ 2, y = 0 \end{cases}$

## Модуль IV. Скалярные и векторные поля

### Тема 4.1. Основные понятия теории поля

31. Пусть в области  $G$  задано векторное поле  $\vec{a}(M)$ . Кривые, в каждой точке  $M$  которых вектор  $\vec{a}(M)$  направлен по касательной к кривой, называются ...
32. Пусть  $u(M)$  — скалярное поле в области  $G$ ;  $\vec{l}$  — фиксированный вектор;  $M$  — фиксированная точка в  $G$ ;  $M^i$  — произвольная точка в  $G$ , отличная от  $M$  и такая, что  $\overrightarrow{MM^i} \vee \vec{l}$ ;  $MM^i$  — величина направленного отрезка, идущего от  $M$  к  $M^i$ . Производной скалярного поля  $u(M)$  в точке  $M$  по направлению вектора  $\vec{l}$  называется число
- $\lim_{M^i \rightarrow M} \frac{u(M) - u(M^i)}{MM^i}$
  - $\lim_{M^i \rightarrow M} \frac{u(M) - u(M^i)}{\vec{l} \vee MM^i} \vec{l}$
  - $\lim_{M^i \rightarrow M} \frac{u(M^i) - u(M)}{MM^i}$
  - $\lim_{M^i \rightarrow M} \frac{u(M^i) - u(M)}{\vec{l} \vee MM^i} \vec{l}$

33. Если в области  $G$  векторное поле  $\vec{a}(M)$  можно представить как градиент некоторого скалярного поля  $u(M)$ , то есть  $\vec{a} = \text{grad } u$ , то поле  $\vec{a}(M)$  называется ...
34. Дивергенцией векторного поля  $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  называется скалярная функция
- $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$
  - $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
  - $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
  - $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}$
35. Ротором (вихрем) векторного поля  $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  называется вектор-функция
- $\text{rot } \vec{a} = (Q_z - R_y)\vec{i} + (R_x - P_z)\vec{j} + (P_y - Q_x)\vec{k}$
  - $\text{rot } \vec{a} = (Q_z - R_y)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (P_y - Q_x)\vec{k}$
  - $\text{rot } \vec{a} = (R_y - Q_z)\vec{i} + (R_x - P_z)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$
  - $\text{rot } \vec{a} = (R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$

#### Тема 4.2. Вычисление производной по направлению и градиента

36. Градиент скалярного поля  $u = \frac{xy}{z}$  в точке  $M(1; -1; 2)$  равен
- $\{-1/2; 1/2; -1/4\}$
  - $\{1/2; -1/2; -1/4\}$
  - $\{1/2; -1/2; 1/4\}$
  - $\{-1/2; 1/2; 1/4\}$
37. Производная скалярного поля  $u = \cos(2yz)$  в точке  $M(0; 1; 4)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \{-1; 4; 8\}$  равна
- $\frac{48 \sin 8}{9}$
  - $\frac{-48 \sin 8}{9}$
  - $\frac{9 \sin 8}{48}$
  - $\frac{-9 \sin 8}{48}$
38. Модуль градиента скалярного поля  $u = \frac{x-y^2}{2}$  в точке  $M(2; 4)$  равен
- $\sqrt{65}/2$
  - $\sqrt{65}/4$
  - $\sqrt{63}/2$



○  $\sqrt{63}/4$

39. Градиент скалярного поля  $u = x^2 + y^2 - 2xy$  равен нулю в точках

- ☐ (1;-1)  
☐ (-1;-1)  
☐ (2;2)  
☐ (-2;2)

40. Градиент скалярного поля  $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  перпендикулярен оси  $Oz$  в точках

- ☐ (-1;1;1)  
☐ (1;-1;1)  
☐ (1;1;1)  
☐ (-1;-1;1)

#### Тема 4.3. Вычисление дивергенции

41. Дивергенция векторного поля  $\vec{a} = (x^2 + y^2)(y - z)\vec{i} + (y^2 + z^2)(z - x)\vec{j} + (z^2 + x^2)(x - y)\vec{k}$  равна

- 0  
 ○  $2(x + y + z)$   
 ○ 2  
 ○  $x + y + z$

42. Дивергенция векторного поля  $\vec{a} = f_1(y, z)\vec{i} + f_2(x, z)\vec{j} + f_3(x, y)\vec{k}$  равна

- $(f_1)_y$   
 ○ 0  
 ○  $(f_2)_x$   
 ○  $(f_1)_z + (f_2)_x + (f_3)_y$

43. Дивергенция векторного поля  $\vec{a} = \frac{x}{z^2}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j}$  в точке  $(1; 2; 1)$  равна

- 2  
 ○ -2  
 ○ 1  
 ○ -1

44. Дивергенция векторного поля  $\vec{a} = e^{x+y+z}\vec{i} - z^3\vec{k}$  в точке  $(0; 2; 4)$  равна

- $e^6 + 48$   
 ○  $e^6 - 48$   
 ○  $e^6 + 84$   
 ○  $e^6 - 84$

45. Дивергенция векторного поля  $\vec{a} = (\cos x)\vec{i} + (\sin y)\vec{j} + (\cos z)\vec{k}$  в точке  $(\pi; 0; \pi)$  равна

- 0  
 ○ -1  
 ○ 1  
 ○ 2

Тема 4.4. Вычисление ротора

46. Ротор векторного поля  $\vec{a} = yz\vec{i} + z(x+2y)\vec{j} + y(x+y)\vec{k}$  равен
- ☐  $\vec{0}$
  - ☐  $2y\vec{i}$
  - ☐  $y\vec{j}$
  - ☐  $(x+y)\vec{k}$
47. Ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{y}{x^2}\vec{j} - \frac{1}{x}\vec{k}$  равен
- ☐  $\frac{-1}{x^2}\vec{j} + \frac{2y}{x^3}\vec{k}$
  - ☐  $\frac{-1}{x^2}\vec{j} - \frac{2y}{x^3}\vec{k}$
  - ☐  $\frac{1}{x^2}\vec{j} - \frac{2y}{x^3}\vec{k}$
  - ☐  $\frac{1}{x^2}\vec{j} + \frac{2y}{x^3}\vec{k}$
48. Ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{y}{x^2}\vec{i} - \frac{1}{x}\vec{j}$  равен
- ☐  $-y\vec{i}$
  - ☐  $x\vec{j}$
  - ☐  $\vec{0}$
  - ☐  $\vec{k}$
49. Ротор векторного поля  $\vec{a} = yz\vec{i} + z(x+2y)\vec{j} + y(x+y)\vec{k}$  в точке  $(2; 1; 0)$  равен
- ☐  $2\vec{i}$
  - ☐  $\vec{0}$
  - ☐  $-3\vec{j}$
  - ☐  $\vec{i} + 2\vec{k}$
50. Ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{y}{x^2}\vec{j} - \frac{1}{x}\vec{k}$  в точке  $(3; 1; 8)$  равен
- ☐  $\frac{-1}{9}\vec{j} - \frac{2}{27}\vec{k}$
  - ☐  $\frac{1}{9}\vec{j} - \frac{2}{27}\vec{k}$
  - ☐  $\frac{1}{9}\vec{j} + \frac{2}{27}\vec{k}$
  - ☐  $\frac{-1}{9}\vec{j} + \frac{2}{27}\vec{k}$

### 7.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

#### 7.3.1. Вопросы к промежуточной аттестации

Семестр 3

№ п/п	Вопросы к зачету
1	Как формулируется определение двойного интеграла? Какие классы интегрируемых функций вам известны?
2	Какие свойства двойных интегралов вам известны?
3	Как формулируются теоремы о вычислении двойных интегралов с помощью повторного интегрирования?
4	Как формулируется теорема о замене переменных в двойном интеграле?
5	Как вычисляются двойные интегралы с помощью полярных координат?
6	Какие геометрические приложения двойных интегралов вам известны?
7	Какие физические приложения двойных интегралов вам известны?
8	Как формулируется определение тройного интеграла? Какие классы интегрируемых функций вам известны?
9	Какие свойства тройных интегралов вам известны?
10	Как вычисляются тройные интегралы с помощью повторного интегрирования?
11	Как формулируется теорема о замене переменных в тройном интеграле?
12	Как вычисляются тройные интегралы с помощью цилиндрических координат?
13	Как вычисляются тройные интегралы с помощью сферических координат?
14	Как вычисляются объёмы тел с помощью тройных интегралов?
15	Каковы физические приложения тройных интегралов?
16	Как формулируется определение криволинейного интеграла первого рода для случая плоской кривой?
17	Как формулируется определение криволинейного интеграла первого рода для случая пространственной кривой?
18	Как вычисляется криволинейный интеграл первого рода с помощью определённого интеграла?
19	Как формулируется определение криволинейного интеграла второго рода для случая плоской кривой?
20	Как формулируется определение криволинейного интеграла второго рода для случая пространственной кривой?
21	Как вычисляется криволинейный интеграл второго рода с помощью определённого интеграла?
22	Каковы свойства криволинейных интегралов первого рода?
23	Каковы свойства криволинейных интегралов второго рода?
24	Каковы физические приложения криволинейных интегралов?
25	Как записывается формула Грина?
26	Как выражается площадь фигуры через криволинейные интегралы по её границе?
27	Каковы условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования?
28	Как определяется понятие скалярного поля?
29	Как определяются линии и поверхности уровня скалярного поля?
30	Как определяется понятие векторного поля?
31	Как определяется понятие векторной линии?

№ п/п	Вопросы к зачету
32	Как определяется производная по направлению скалярного поля?
33	Как определяется производная по направлению векторного поля?
34	Как определяется градиент скалярного поля?
35	Как определяется потенциальное поле?
36	Как определяется дивергенция векторного поля?
37	Как определяется ротор векторного поля?
38	Как определяется соленоидальное поле?
39	Как определяется оператор Гамильтона? Каковы правила вычислений с оператором Гамильтона?
40	Как определяются нестационарные скалярные поля?
41	Как определяются нестационарные векторные поля?
42	Как определяются повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях?
43	Как формулируется теорема о разложении векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей?
44	Как определяется понятие евклидова пространства?
45	Как записывается неравенство Коши-Буняковского?
46	Как определяется понятие ортонормированной системы в евклидовом пространстве?
47	Какие примеры ортонормированных систем в евклидовых пространствах вам известны?
48	Как определяется ряд Фурье элемента евклидова пространства?
49	Как записывается тождество Бесселя?
50	Как записывается неравенство Бесселя?
51	Как записываются тригонометрические ряды Фурье для функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$ . Какой вид принимает в этом случае неравенство Бесселя?
52	Как определяются замкнутые ортонормированные системы в евклидовом пространстве?
53	Как записывается равенство Парсеваля?
54	Как формулируется теорема о ряде Фурье элемента по замкнутой ортонормированной системе?
55	Как определяются полные ортонормированные системы в евклидовом пространстве?
56	Как связаны между собой понятия замкнутости и полноты ортонормированной системы?
57	Как формулируется теорема о рядах Фурье двух элементов по полной ортонормированной системе?
58	Как доказывается теорема о замкнутости тригонометрической системы в пространстве кусочно-непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций?
59	Какие следствия замкнутости тригонометрической системы вам известны?
60	Каковы простейшие условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье?
61	Каковы простейшие условия почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье?
62	Как формулируется теорема Дирихле о сходимости тригонометрического ряда Фурье?
63	Как записывается тригонометрический ряд Фурье для функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$ ?
64	Как записывается тригонометрический ряд Фурье для чётных функций?
65	Как записывается тригонометрический ряд Фурье для нечётных функций?
66	Как определяется понятие образа Фурье?
67	Каковы простейшие свойства образа Фурье?

№ п/п	Вопросы к зачету
68	Каковы условия разложимости функции в интеграл Фурье?
69	Как определяются прямое и обратное преобразования Фурье?
70	Как записываются косинус- и синус-преобразования Фурье?

### 7.3.2. Критерии и нормы оценки

Семестр	Форма проведения промежуточной аттестации	Критерии и нормы оценки	
3	Зачет (по накопительному рейтингу)	«зачтено»	Оценка «зачтено» ставится при наборе от 55 до 100 итоговых баллов.
		«не зачтено»	Оценка «не зачтено» ставится при наборе менее 55 итоговых баллов.

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 8.1. Обязательная литература

№ п/п	Авторы, составители	Заглавие (заголовок)	Тип (учебник, учебное пособие, учебно-методическое пособие, практикум, др.)	Год издания	Количество в научной библиотеке / Наименование ЭБС
1	Б.А. Горлач	Математический анализ	Учебное пособие	2024	ЭБС «Лань»
2	Г.М. Фихтенгольц	Основы математического анализа. В 3 т. Том 3	Учебник	2025	ЭБС «Лань»
3	Б.П. Демидович	Сборник задач и упражнений по математическому анализу	Учебное пособие	2025	ЭБС «Лань»

### 8.2. Дополнительная литература

№ п/п	Авторы, составители	Заглавие (заголовок)	Тип (учебник, учебное пособие, учебно-методическое пособие, практикум, др.)	Год издания	Количество в научной библиотеке / Наименование ЭБС
4	В.С. Шипачев	Математический анализ	Учебное пособие	2015	ЭБС "ZNANIUM.COM"
5	Г.М. Фихтенгольц	Основы математического анализа. В 2 ч. Ч.1	Учебник	2015	ЭБС «Лань»
6	Г.И. Запорожец	Руководство к решению задач по математическому анализу	Учебное пособие	2014	ЭБС «Лань»
7	А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович	Краткий курс математического анализа	Учебное пособие	2010	ЭБС «Лань»

### 8.3. Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем

№ пп	Наименование	Ссылка
1	Springer Nature (Полнотекстовая коллекция журналов)	<a href="https://www.springernature.com/gp/products">https://www.springernature.com/gp/products</a>
2	Springer eBooks (Полнотекстовая коллекция электронных книг издательства Springer Nature)	<a href="https://link.springer.com/">https://link.springer.com/</a>
3	«Кодекс»	<a href="https://kodeks.ru/">https://kodeks.ru/</a>
4	Техэксперт	<a href="https://cntd.ru/">https://cntd.ru/</a>

### 8.4. Перечень программного обеспечения

№ п/п	Наименование ПО	Реквизиты договора (дата, номер, срок действия)
1	Windows: WinPro 10 RUS Upgrd OLP NL Acdmc	договор № 757 от 04.07.2018, срок действия - бессрочно; контракт № 1653 от 14.12.2018, срок действия – бессрочно
2	Office Standard: Office Stdandard 2013 Russian OLP NL AcademicEdition	договор № 690 от 19.05.2015, срок действия - бессрочно)

### 8.5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№ п/п	Наименование оборудованных учебных кабинетов, лабораторий, мастерских и др. объектов для проведения практических и лабораторных занятий, помещений для самостоятельной работы обучающихся (номер аудитории)	Перечень основного оборудования
1	Учебная аудитория для проведения лабораторных работ. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа. Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа. Учебная аудитория для курсового проектирования (выполнения курсовых работ). Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций. Учебная аудитория для проведения занятий текущего контроля и промежуточной аттестации (УЛК-305).	Микрокомпьютер (Raspberri Pi 3), коммутатор (D-Link), стол ученический, стол компьютерный, парты ученические, стулья, доска аудиторная (меловая)
2	Помещение для самостоятельной работы обучающихся (Г-401).	Столы, стулья, компьютеры

№ п/п	<b>Наименование оборудованных учебных кабинетов, лабораторий, мастерских и др. объектов для проведения практических и лабораторных занятий, помещений для самостоятельной работы обучающихся (номер аудитории)</b>	<b>Перечень основного оборудования</b>
3	Помещение для самостоятельной работы обучающихся (УЛК-105)	Столы, стулья, стеллажи (в т.ч. выставочные) с книгами, компьютеры, мобильные рабочие места.
4	Помещение для самостоятельной работы обучающихся (УЛК-406)	Столы компьютерные, стулья, микрокомпьютеры raspberry pi 32 bit
5	Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа. Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа. Учебная аудитория для курсового проектирования (выполнения курсовых работ). Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций. Учебная аудитория для проведения занятий текущего контроля и промежуточной аттестации. (УЛК-413)	Столы ученические двухместные (моноблок), стол преподавательский, стул, доска аудиторная (меловая), проектор